CÁLCULO INFINITESIMAL

Primer curso. Examen extraordinario de Febrero. 9 de Diciembre de 2009.

APELLIDOS...NÚMERO..........
NOMBRE...

Primera pregunta. Cada uno de los apartados se calificará de 0 a 2 puntos. Un error considerado **muy grave** en alguno de los apartados puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.
Responda breve y razonadamente

1. Obtener de forma exacta las raíces de la ecuación $x^2 + ix + 1 + 3i = 0$.

   $$x = \frac{-i \pm \sqrt{-1 - 4(1+3i)}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-5 - 12i}}{2}$$
   $\sqrt{-5-12i} = a+ib \;\Rightarrow\; -5-12i = a^2-b^2+2abi \;\Rightarrow\; a^2-b^2 = -5,\ 2ab = -12 \;\Rightarrow\; a^4+5a^2-36 = 0$ y asi $a^2 = 4$ o $a^2 = -9$ que no es válida ya que a es real. Asi, $\sqrt{-5-12i} = \pm(2-3i)$. Se sigue que $x = 1-2i$, $x = -1+i$.

2. ¿Cuántas raíces reales tiene la ecuación $4x^3 + 2x + e^{x^3} = 0$?

   Sea $f(x) = 4x^3 + 2x + e^{x^3}$. Como $f(0) = 1 > 0$ y $f(-1) = e^{-1} - 6 < 0$, al menos tiene una raíz. Como $f'(x) = 12x^2 + 2 + 3x^2e^{x^3}$ que es siempre positiva, f es creciente y tiene como máximo 1 raíz. Se sigue que tiene una y sólo una raíz.

3. Supongamos que $a_n > 0$ para todo n y que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ converge. Decidir cuáles de las siguientes implicaciones son verdaderas y cuáles falsas. Argumentar en cada caso.

   (a) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha a_n$ converge si $\alpha < 1$. Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha a_n}{na_n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1} = 0$ si $\alpha < 1$, la serie es convergente.

   (b) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ es convergente, y $a_n < na_n$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente. Por tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ converge absolutamente.

   (c) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge. Ya hemos visto que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente. Así, $\lim_n a_n = 0$ y, por tanto, $a_n < 1$. Se sigue que $a_n^2 < a_n$. Asi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 << \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y es convergente.

   (d) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ converge. Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$, la serie es divergente.

4. Sean f y g dos funciones definidas en el intervalo $(-1,1)$, $f \in C^{(1}(-1,1)$ y $g \in C^{(2}(-1,1)$. Supongamos que $f(0) = f'(0) = 0$ y $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$. De los siguientes límites, calcular los que sea posible y justificar en caso de ser imposible el cálculo con los datos que se tiene.

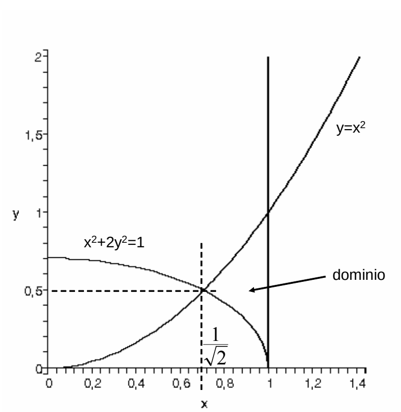
   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = f'(0) = 0.$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g'(x)}{2x} = \dfrac{g''(0)}{2} = 0.$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-g(x)}{x^2}$. Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = 0$, todo depende de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$. Si tomamos $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$ y $f(x) = -x^2$ si $x < 0$, el límite no existe.

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)g(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = 0.$

5. Dada la integral doble $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dx \int_{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}^{x^2} f(x,y)\, dy$ dibujar el dominio de integración, y cambiar el orden de la misma.



$$\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\sqrt{1-2y^2}}^{1} f(x,y)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\, dx$$

CÁLCULO INFINITESIMAL

Primer curso. Examen extraordinario de Febrero. 9 de Diciembre de 2009.

APELLIDOS...NÚMERO..........
NOMBRE...

Segunda pregunta. Un error considerado **muy grave** puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.

Sea $0 < a < 1$. Considerese la función

$$F : [0,1) \to \mathbf{R} \qquad F(x) = \int_0^x \frac{t(t-a)}{\sqrt{1-t}}\,dt$$

1. Hallar los extremos locales de F en $(0,1)$. (3 puntos.)
2. Estudiar, según los valores de a, la existencia de máximo y mínimo absolutos de F, determinando el punto, o puntos, donde se alcanzan. (7 puntos.)

1. $F'(x) = \dfrac{x(x-a)}{\sqrt{1-x}}$. Igualando a 0, se tiene que, en el intervalo abierto $(0,1)$, sólo se anula en $x = a$. Como $F' < 0$ en $(0,a)$ y $F' > 0$ en $(a,1)$, F tiene en a un mínimo local y absoluto.
2. Como tiene en a un mínimo absoluto y no hay más puntos críticos, debemos estudiar el comportamiento de F al tender x a 1. Se trata de una integral impropia en este extremo y asi hay que hallar $\lim\limits_{x\to 1} F(x)$. Con el cambio de variable $1 - t = u^2$ se tiene

   $$F(x) = -\int_1^{\sqrt{1-x}} \frac{(1-u^2)(1-u^2-a)}{u}\,2u\,du =$$
   $$= 2\left[1 - a + \frac{a-2}{3} + \frac{1}{5} - (1-a)\sqrt{1-x} - \frac{a-2}{3}(\sqrt{1-x})^3 - \frac{1}{5}(\sqrt{1-x})^5\right]$$

   Así, $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{4}{5} - a\right)$. Si $a \geq \dfrac{4}{5}$, el límite es ≤ 0 y el máximo absoluto se alcanza en $x = 0$ y vale $F(0) = 0$. Si $a < \dfrac{4}{5}$, el límite es positivo. El máximo correspondería a $x = 1$ que no pertenece al intervalo. Por tanto no se alcanza.

CÁLCULO INFINITESIMAL

Primer curso. Examen extraordinario de Febrero. 9 de Diciembre de 2009.

APELLIDOS..NÚMERO..........
NOMBRE..

Tercera pregunta. Un error considerado **muy grave** puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.

Se considera la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{n^2+n} x^{n+1}$

1. Hallar el intervalo de convergencia. (1 punto.)
2. Estudiar la convergencia en los extremos de dicho intervalo. (2 punto.)
3. Comprobar que la función $f(x) = (x-1)\ln(1-2x) - 2x$ es la suma de la serie en dicho intervalo. (5 puntos.)
4. Sumar $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n^2+n}$. (1 puntos.)
5. Sumar $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{2^{n+1}(n^2+n)}$. (1 puntos.)

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2^n(n-1)}{n^2+n}|x|^{n+1}}{\frac{2^{n-1}(n-2)}{(n-1)^2+(n-1)}x^n} = \lim_{n\to+\infty} 2|x|\frac{n-1}{n-2}\frac{(n-1)^2+(n-1)}{n^2+n} = 2|x| < 1$. Se sigue que el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2. $x = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^n(n-1)}{n^2+n}x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^n(n-1)}{n^2+n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)}{n^2+n}$, que es alternada y por el criterio de Leibnitz, es convergente.

   $x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^n(n-1)}{n^2+n}x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^n(n-1)}{n^2+n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(n-1)}{n^2+n}$, y es divergente (Pringsheim). Asi el intervalo es $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3. Distintas formas de resolverlo:

   - **Desarrollando:** Si $g(x) = \ln(1-2x)$, entonces $g'(x) = -2\dfrac{1}{1-2x} = -2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}2^{n+1}x^n \;\Rightarrow$ $g(x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{n+1} + C$. Como $g(0) = 0$, $C = 0$ y asi $g(x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{n+1}$. Se sigue que

     $$f(x) = (x-1)\left(-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{n+1}\right) - 2x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{n+1}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{n+1}x^{n+2} - 2x$$

Simplificando y cambiando los índices en el segundo sumatorio,
$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n} \right) x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{(n+1)n} x^{n+1}$, ya que el primer sumando vale 0.

- **Sumando:** Sea

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{n^2+n} x^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)(2x)^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n})(2x)^{n+1}$$

Separando en dos partes dicha serie se tiene

$$g(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} 2 \frac{(2x)^{n+1}}{n+1} = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \int (2x)^n dx = 2 \int \sum_{n=2}^{+\infty} (2x)^n dx = 2 \int \frac{4x^2}{1-2x} dx$$

$$\Rightarrow \; g(x) = -2x - 2x^2 - \ln(1-2x) + C$$

Como $g(0) = 0 \;\Rightarrow\; C = 0 \;\Rightarrow\; g(x) = -2x - 2x^2 - \ln(1-2x)$

$$h(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x)^{n+1}}{n} = - \sum_{n=2}^{+\infty} 2x \int (2x)^{n-1} dx = -2x \int \sum_{n=2}^{+\infty} (2x)^{n-1} dx = -2x \int \frac{2x}{1-2x} dx$$

$$\Rightarrow \; h(x) = -2x[-x - \frac{1}{2} \ln(1-2x) + C]$$

Como $h(0) = h'(0) = 0 \;\Rightarrow\; C = 0 \;\Rightarrow\; h(x) = 2x^2 + x \ln(1-2x)$
Y por lo tanto,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{n^2+n} x^{n+1} = -2x - 2x^2 - \ln(1-2x) + 2x^2 + x\ln(1-2x) = (x-1)\ln(1-2x) - 2x$$

4. Si $x = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{n^2+n} x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n(n-1)}{n^2+n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)}{n^2+n} =$
$= f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{2} \ln 2.$

5. De forma similar, la serie corresponde a $x = \frac{1}{4}$ y su valor es $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{1}{2}$.

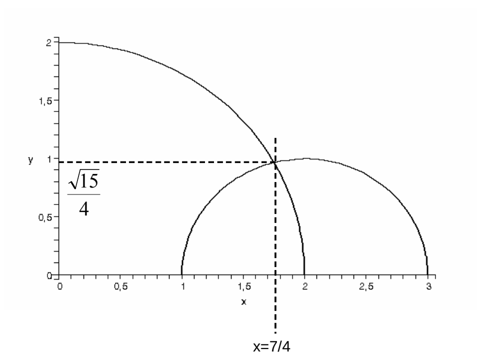
CÁLCULO INFINITESIMAL

Primer curso.Examen extraordinario de Febrero. 9 de Diciembre de 2009.

APELLIDOS..NÚMERO..........
NOMBRE...

Cuarta pregunta. Planteamiento de la o las integrales necesarias, incluyendo posibles cambios de variable, hasta 5 puntos. Resolución efectiva de la o las integrales, 5 puntos. Sólo se calificará la segunda parte si la primera ha sido realizada correctamente. Un error considerado **muy grave** puede hacer que la calificación global de la pregunta sea 0 puntos.

Hallar la masa de la placa $\{(x,y)\;|x^2+y^2\leq 4,\ x^2-4x+y^2+3\geq 0,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$, siendo la densidad $\delta(x,y)=y\operatorname{sen}x$.



Plantearemos la integral como diferencia de dos: La primera zona (A) es la comprendida debajo de $x^2+y^2=4$ hasta $x=\dfrac{7}{4}$, y la otra (B), bajo $x^2-4x+y^2+3=0$ y desde $x=1$ hasta $x=\dfrac{7}{4}$.

$m=\iint_A y\operatorname{sen}x\,dx\,dy-\iint_B y\operatorname{sen}x\,dx\,dy=\int_0^{\frac{7}{4}}\operatorname{sen}x\,dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}}y\,dy-\int_1^{\frac{7}{4}}\operatorname{sen}x\,dx\int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}}y\,dy=$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{7}{4}}(4-x^2)\operatorname{sen}x\,dx-\dfrac{1}{2}\int_1^{\frac{7}{4}}(4x-x^2-3)\operatorname{sen}x\,dx$

Con una elemental integración por partes se tiene que

$\int x\operatorname{sen}x\,dx=\operatorname{sen}x-x\cos x$

$\int x^2\operatorname{sen}x\,dx=-x^2\cos x+2(x\operatorname{sen}x+\cos x)$

y aplicando la regla de Barrow,

$m=3-2\operatorname{sen}\dfrac{7}{4}+\operatorname{sen}1-\cos 1.$